Prof. Dr. A. Beliakova Herbstsemester 2017

Lineare Algebra I
Serie 1

Abgabe: Freitag 29.09.2017, 12.00

Bemerkung: Die Aufgaben 1, 2 und 3 werden in der Übungsklasse gelöst werden.

Aufgabe 1. Beweise, dass das folgende in jeder Gruppe $(G, \circ, e)$ gilt:

(a) Jedes linksneutrale Element e ist auch rechtsneutral, das heisst, es gilt $\forall a \in G$: $a \circ e = a$. Wir nennen e darum kurz *neutrales Element* von G.

(b) Jedes zu $a \in G$ linksinverse Element $a' \in G$ ist auch rechtsinvers, das heisst, es gilt $a \circ a' = e$. Wir nennen a' darum kurz *inverses Element zu* a.

(c) Das neutrale Element von G ist eindeutig bestimmt.

(d) Zu jedem $a \in G$ ist das inverse Element eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen es mit a^{-1}.

(e) Für alle $a \in G$ gilt $(a^{-1})^{-1} = a$.

(f) Für alle $a, b \in G$ gilt $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

(g) Für alle $a, b \in G$ existiert ein eindeutiges $x \in G$ mit $a \circ x = b$.

(h) Für alle $a, b \in G$ existiert ein eindeutiges $y \in G$ mit $y \circ a = b$.

(i) Für alle $a, b, c \in G$ gilt $b = c \Leftrightarrow a \circ b = a \circ c$.

(j) Für alle $a, b, c \in G$ gilt $b = c \Leftrightarrow b \circ a = c \circ a$.

Aufgabe 2. Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe. Die *Multiplikationstafel* von G ist eine Tafel, die alle Produkte $g \circ h$ mit $g, h \in G$ enthält:

$\circ$	e	$\cdots$	h	$\cdots$
e	e	$\cdots$	h	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
g	g	$\cdots$	$g \circ h$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Beweise, dass jedes Element der Gruppe in einer Reihe (oder Spalte) genau einmal vorkommt.

Aufgabe 3. Sei G die Menge aller möglichen Bewegungen eines Rubiks Würfels. Beweise, dass $(G, \circ, e)$ eine Gruppe ist, wobei die Abbildung $\circ$ die Verknüpfung zweier Bewegungen ist. Welche Bewegung entspricht dem neutralen Element e?

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei $G = \{e, a, b\}$ eine Menge mit drei verschiedenen Elementen. Definiere eine Abbildung $\circ : G \times G \to G$, so dass $(G, \circ, e)$ eine Gruppe ist. Wie viele verschiedene Arten gibt es für die Definition von $\circ$?

Aufgabe 5 (4 Punkte). Welche dieser Vorschriften definieren eine kommutative Gruppe $(G, *)$?

(a) $G := \mathbb{Z}^{\geq 0}, a * b := \max\{a, b\}$

(b) $G := \mathbb{R}^{>0}, a * b := a^b$

(c) $G := \mathbb{Z}^{>0}, a * b := \mathrm{kgV}(a, b)$ (kleinstes gemeinsames Vielfaches von a, b).

(d) G ist das offene Intervall $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung

$$x_1 * x_2 = \frac{x_1 x_2}{1 - (x_1 + x_2) + 2x_1 x_2}\,.$$

Aufgabe 6 (3 Punkte). Zeige, dass

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

mit der Addition und Multiplikation von den reellen Zahlen ein Körper ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $M = \{0, a, b, c\}$ eine Menge mit 4 Elementen.

(a) Definiere eine Gruppenstruktur mit Einselement 0 auf der Menge M.

(b) Finde alle solche Gruppenstrukturen (mit Beweis).

(c) Definiere eine Körperstruktur mit additivem Einselement 0 und multiplikativem Einselement a.

(d) Ist diese Körperstruktur eindeutig?

Aufgabe 8 (2 Punkte). Sei $\mathbb{F}_5 := \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ mit paarweise verschiedenen Symbolen $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$. Darauf seien Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert durch

$$\begin{aligned} \overline{a} + \overline{b} &:= \overline{x}, \quad \text{wobei } x = a + b \pmod 5, \\ \overline{a} \cdot \overline{b} &:= \overline{x}, \quad \text{wobei } x = a \cdot b \pmod 5, \end{aligned}$$

für beliebige $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{Z}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dies die Struktur eines Körpers definiert. Berechne:

(a) $\overline{4}^{2017}$,

(b) $\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}}$.

(c) Finde die Lösungen in $\mathbb{F}_5$ von $x + y = \overline{0}$.

Aufgabe 9 (2 Punkte). Sei $(G, *)$ eine Gruppe und sei $a \in G$ ein gegebenes Element. Definiere die Vorschrift $\bullet$ durch

$$g \bullet h := g * a * h$$

für alle $g, h \in G$. Zeige, dass $(G, \bullet)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 10 (2 Punkte). Sei Z_n der Ring der ganzen Zahlen modulo n, mit $n \geq 1$. Beweise, dass Z_n ein Körper ist, genau dann wenn n eine Primzahl ist.
Tipp: Beweise die folgenden Aussagen:

$$n \text{ ist keine Primzahl} \Rightarrow Z_n \text{ ist kein Körper,}$$

und

$$n \text{ ist eine Primzahl} \Rightarrow Z_n \text{ ist ein Körper.}$$

Aufgabe 11 (1 Punkt). Annehme, dass es $g^2 = e$ für alle Elemente einer Gruppe G gilt. Beweise, dass G eine abelsche Gruppe ist.